

一元函数积分学练习题

§1 定积分的概念、性质和微积分基本定理

1. 试用定积分表示下列各个极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{nk}{n^2 + k^2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^2}};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}.$$

2. 证明下列不等式:

$$(1) \frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{\pi}{6};$$

$$(2) 2 < \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^6} dx < \frac{5}{2}.$$

3. 计算下列导数:

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^{\tan^2 x} \sqrt{1+t^2} dt;$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_{-x}^{\ln(1+x)} \ln(1+t^2) dt.$$

4. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin^2 t dt}{x^2 \ln(1+x)};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin 2x} (e^{t^2} - 1) dt}{x^2 \sin x}.$$

5. 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx;$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(4) \int_1^e (1 + \ln x) dx.$$

6. 证明方程

$$\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt + \int_{\cos x}^0 e^{-t^2} dt = 0$$

有且只有一个实根。

7. 设函数 f 在 $[-\frac{1}{a}, a]$ 上非负连续 ($a > 0$), 且 $\int_{-\frac{1}{a}}^a xf(x)dx = 0$, 证明:

$$\int_{-\frac{1}{a}}^a x^2 f(x) dx \leq \int_{-\frac{1}{a}}^a f(x) dx.$$

8. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上连续递增, 证明: 对于任意给定的 $b > a > 0$, 成立

$$\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{1}{2} \left(b \int_0^b f(x) dx - a \int_0^a f(x) dx \right).$$

9. 设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$. 证明: $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2$.

10. 设函数 f 在 $[a, b]$ 上导数连续, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明:

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx \leq \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

11. 设函数 f 在 $[0, 1]$ 上导数连续, 且 $f(0) = f(1) = 0$ 。证明

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{4} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx。$$

12. 设函数 f 在 $[0, 1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x) dx = 0$, $\int_0^1 xf(x) dx = 1$, 证明:

(1) 存在 $a \in [0, 1]$, 使得 $|f(a)| > 4$;

(2) 存在 $b \in [0, 1]$, 使得 $|f(b)| = 4$ 。

13. 设函数 f 在 $[-a, a]$ 上非负连续 ($a > 0$), 且 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a x^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-a}^a xf(x) dx = 0$ 。证明: 对于任意给定的 $u \in [-a, 0]$, 成立

$$\int_{-a}^u f(x) dx \leq \frac{1}{1+u^2}。$$

§ 2 不定积分的计算

1. 计算下列不定积分:

(1) $\int 2^x 3^{-x} dx;$

(2) $\int (x^2 - x^{-1})\sqrt{x} dx;$

(3) $\int \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

(4) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2} dx;$

(5) $\int \tan x (\tan x + \sec x) dx;$

(6) $\int (\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{3}{1+x^2}) dx。$

2. 计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{xdx}{2x^2 + 5};$

(2) $\int \frac{4x+3}{x^2 + 2x + 2} dx;$

(3) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 4}};$

(4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

(5) $\int \frac{e^x - 1}{1 + 3e^x} dx;$

(6) $\int x\sqrt{1-x^2} dx;$

(7) $\int x^{-2} \sin \frac{2}{x} dx;$

(8) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x};$

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}};$

(10) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}};$

(11) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx;$

(12) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4x^2 + 1}};$

(13) $\int \frac{x+1}{x(x + \ln x)} dx;$

(14) $\int \frac{1}{x(x^3 + 1)} dx;$

(15) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x+1}};$

(16) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} dx。$

$$(17) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx;$$

$$(19) \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx;$$

3. 计算下列不定积分:

$$(1) \int \sin^4 x dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{1+2 \tan x};$$

$$(5) \int \frac{\cos 2x}{1+\sin^2 x} dx;$$

$$(7) \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx;$$

$$(9) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx;$$

$$(10) \int \frac{dx}{\cos x + \cos a} \quad (a \neq k\pi, k=1,2,\dots).$$

4. 计算下列不定积分:

$$(1) \int x 2^x dx;$$

$$(3) \int x^3 \ln x dx;$$

$$(5) \int x^2 \cos^2 x dx;$$

$$(7) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx;$$

$$(9) \int x^2 \sqrt{x^2+1} dx;$$

$$(11) \int x \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx;$$

5. 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)};$$

$$(3) \int \frac{xdx}{x^4-4x^2+3};$$

$$(5) \int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)(x-3)};$$

$$(7) \int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x+2)(x^2+1)};$$

$$(18) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}};$$

$$(20) \int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$(2) \int \frac{\tan x}{\tan^2 x - 1} dx;$$

$$(4) \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx;$$

$$(6) \int \frac{dx}{\sin x + 3 \cos x + 2};$$

$$(8) \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} dx;$$

$$(2) \int \arctan x dx;$$

$$(4) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx;$$

$$(6) \int \frac{xdx}{\tan^2 x};$$

$$(8) \int \frac{\sin 2x}{1+e^{\sin^2 x}} dx;$$

$$(10) \int \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^2} dx;$$

$$(12) \int (x+1)\sqrt{x^2+x+1} dx.$$

$$(2) \int \frac{x}{x^4-1} dx;$$

$$(4) \int \frac{(x+1)^3}{(x^2+1)^2} dx;$$

$$(6) \int \frac{(x+1)dx}{(x^2-2x+5)^2};$$

$$(8) \int \frac{2(x+1)dx}{(x-1)(x^2+1)^2}.$$

§ 3 定积分的计算

1. 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx;$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx;$$

$$(5) \int_0^1 x \arctan x dx;$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx;$$

$$(2) \int_0^{\pi} x \sin^3 x dx;$$

$$(4) \int_0^1 x \arcsin x dx;$$

$$(6) \int_0^1 \ln(1+x^2) dx;$$

$$(8) \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^2} dx。$$

2. 计算下列定积分:

$$(1) \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx;$$

$$(3) \int_{-1}^1 \frac{(x+1)dx}{2-x^2};$$

$$(5) \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x} dx;$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} d\theta;$$

$$(2) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{(x+2)dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}};$$

$$(4) \int_0^1 \frac{\arctan x dx}{(1+x^2)^{3/2}};$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx;$$

$$(8) \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx。$$

3. 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^2 \max(x, x^2) dx;$$

$$(3) \int_{-1}^1 \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} dx;$$

$$(5) \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x dx;$$

$$(2) \int_0^2 |x-1| e^x dx;$$

$$(4) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx;$$

$$(6) \int_0^2 x[x^2] dx。$$

4. 计算定积分 $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx。$

5. 设 f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$, 证明:

(1) 若 f 为偶函数, 则 $F(x)$ 也是偶函数;

(2) 若 f 为递减函数, 则 $F(x)$ 是递增函数。

6. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$, 计算 $I = \int_0^3 f(x-1)dx。$

7. 设 $[0, \pi]$ 上的连续函数 f 满足 $f(x) = \sin x + 2 \int_0^{\pi} f(x)dx$, 求 $f(x)。$

8. 设函数 f 在 $(1, +\infty)$ 上连续且单调减少, 证明

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx。$$

9. 设函数 f, g 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) \neq 0$ 。证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}.$$

10. 设函数 f 在 $[0, 1]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$ 。证明:

$$(1) \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x-1)f''(x)dx;$$

$$(2) \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|.$$

11. 设函数 f 在 $[0, 1]$ 上二阶导数连续, 且 $f'(0) = f'(1) = 0$, 证明存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} + \frac{f''(x_0)}{6}.$$

12. 设函数 f 在 $[0, \pi]$ 上连续, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} |\sin nx| f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx$ 。

13. 设函数 f 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f''(x) \neq 0$, $f(a) = f(b) = 0$, 且有 $x_0 \in (a, b)$,

使 $y_0 = f(x_0) > 0$, $f'(x_0) = 0$ 。证明:

$$(1) \text{ 存在 } x_1 \in (a, x_0) \text{ 和 } x_2 \in (x_0, b), \text{ 使得 } f(x_1) = f(x_2) = \frac{y_0}{2};$$

$$(2) \int_a^b f(x)dx < y_0(x_2 - x_1).$$

§ 4 定积分的应用

1. 求抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 所围图形的面积。

2. 求由曲线 $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围图形的面积。

3. 求旋轮线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$) 与 x 轴所围图形的面积。

4. 求 $r = 2\cos\theta$ 与 $r = 2\sin\theta$ 所围公共部分图形的面积。

5. 求 $r = 1 + \cos\theta$ 与 $r = 3\cos\theta$ 所围公共部分图形的面积。

6. 求由圆盘 $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 1$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周, 所得旋转体的体积。

7. 求旋轮线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$) 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积。

8. 求 $r = 1 + \cos\theta$ 所围图形绕极轴旋转一周所得旋转体体积。

9. 求抛物线 $y^2 = 4ax$ ($a > 0$) 与过焦点的弦所围图形的面积的最小值, 并求出这时的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

10. 求下列曲线段的弧长:

(1) $y = e^x$ ($0 \leq x \leq 2$);

(2) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ($-1 \leq x \leq 1$); $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(3) $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$);

(4) $r = a\theta$ ($a > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$).

11. 求下列曲线在指定点的曲率和曲率半径:

(1) $y = x^2$, 在点 $(1, 1)$;

(2) $x = 3t^2, y = 2t^3$, 在 $t=1$ 对应的点。

12. 求下列曲线的曲率和曲率半径:

(1) $y = x + \frac{1}{x}$ ($x > 0$);

(2) $y = x^3 + 3x$;

(3) $r = a\theta$ ($a > 0$);

(4) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$).

13. 求曲线 $y = \ln x$ 上曲率最大的点, 并求出该点的曲率圆方程。

14. 求下列旋转曲面的面积:

(1) $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 绕 x 轴旋转一周生成的曲面;

(2) 旋轮线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$) 绕 x 轴一周生成的曲面;

(3) 双扭线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 绕极轴产生的曲面。

15. 过点 $(1, 0)$ 作曲线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 求曲线 $y = \sqrt{x-2}$ 与该切线, 以及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

16. 有一等腰三角形薄板, 底边长为 a , 高为 h 米, 薄板垂直倒立于水中, 底边与水平面相齐。求水对薄板的侧压力。

17. 设有一半径为 R 、高为 H 的均匀圆柱体平放在水深为 $2R$ 的水池中 (即圆柱体的侧面与水面相切), 圆柱体的密度为 ρ , 现将圆柱体抬出水面, 需作多少功? (设水的密度为 1)

18. 设有一均匀的半径为 r 的圆形薄片, 其面积为 S 。在圆心的正上方有一个单位质点, 质点到圆心的距离为 a 。

(1) 求薄片的边界对该质点的引力;

(2) 求薄片对该质点的引力;

(3) 如果圆心的正上方有一条长为 l 、质量为 m 的均匀细杆垂直于薄片, 下端距圆心为 a , 求薄片对细杆的引力。

§ 5 反常积分

1. 计算下列无穷限的反常积分:

(1) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)(x+1)} dx$;

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx;$$

$$(5) \int_2^{+\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{x}}{x\sqrt{x^2-1}} dx;$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$(7) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+2x^2+2x^4}};$$

$$(8) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx。$$

2. 判别下列无穷限反常积分的收敛性:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2+1} dx;$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} dx;$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+e^x};$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}} dx;$$

$$(5) \int_1^{+\infty} \arctan \frac{1}{x^2} dx;$$

$$(6) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\ln(x+1)-\ln x} dx。$$

3. 计算下列反常积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx;$$

$$(2) \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x(1-x)}} dx;$$

$$(3) \int_0^1 (x+1) \ln x dx;$$

$$(4) \int_{-1}^1 x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx。$$

4. 判别下列反常积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^4}} dx;$$

$$(2) \int_1^2 \frac{\sin x}{\ln x} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x\sqrt{x+1}};$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx。$$

5. 计算下列 Cauchy 主值积分:

$$(1) (CPV) \int_{-2}^1 \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}};$$

$$(2) (CPV) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+2}。$$

6. 把下列积分表示为 Γ 函数:

$$(1) \int_0^{+\infty} x e^{-x^3} dx ;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2^x} dx .$$

7. 利用 Γ 函数计算下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-3x} dx ;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^3} dx .$$

8. 利用B函数计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \sin^8 x dx ;$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} x \sin^{\frac{5}{2}} x dx$$

9. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ ($a > 0$).

10. 证明当 $a, b > 0$ 时, 只要下式两边的反常积分有意义, 就有

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2 + 4ab}\right) dx .$$