Euclid空间与酉空间练习题

§1　内积

1．设 $\boldsymbol{x}=(1,-2,2,3)^T$，　$\boldsymbol{y}=(3,1,5,1)^T$，

（1）求 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的夹角；

（2）求与 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 都垂直的全部向量。

2．将向量组

$$\boldsymbol{a}_1=(1,-2,2)^T，\quad \boldsymbol{a}_2=(-1,0,-1)^T，\quad \boldsymbol{a}_3=(5,-3,-7)^T$$

化为正交的单位向量组。

3．设 $\boldsymbol{B}$ 是 5×4 矩阵，且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=2$。已知齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的三个解向量为

$$\boldsymbol{a}_1=(1,1,,2,3)^T，\quad \boldsymbol{a}_2=(-1,1,4,-1)^T，\quad \boldsymbol{a}_3=(5,-1,-8,9)^T，$$

求 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一个标准正交基。

4．已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_3+x_4=0, \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$$

（1）　求该方程组的解空间的的一个标准正交基；

（2）　求与该方程组的解空间中向量都正交的全部向量。

5．已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & d \\ -\frac{3}{7} & c & \frac{2}{7} \\ b & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$ 为正交矩阵，求 a，b，c，d。

6．已知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基，证明：

$$\boldsymbol{b}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3)，\quad \boldsymbol{b}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3)，\quad \boldsymbol{b}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3)$$

也是 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基。

7．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正交矩阵且 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$，证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$。

8．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}=0$。证明 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 是正交矩阵。

9．设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正交矩阵，问 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 与其代数余子式 A_{ij} 有何关系？

10．设 $\boldsymbol{a}$ 为 n 维实列向量，且 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=1$。证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$ 为正交矩阵。

11．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实反对称矩阵。证明：若对于 n 维实列向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 有 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交。

12．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实反对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。证明 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$ 是正交矩阵。

13．设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的标准正交基，A 是 $\mathbf{R}^4$ 上的线性变换满足

$$A\boldsymbol{a}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}_2,\quad A\boldsymbol{a}_2=\frac{\sqrt{6}}{6}\boldsymbol{a}_1-\frac{\sqrt{6}}{6}\boldsymbol{a}_2+\frac{\sqrt{6}}{3}\boldsymbol{a}_3,$$

$$A\boldsymbol{a}_3=-\frac{\sqrt{3}}{6}\boldsymbol{a}_1+\frac{\sqrt{3}}{6}\boldsymbol{a}_2+\frac{\sqrt{3}}{6}\boldsymbol{a}_3+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{a}_4,\quad A\boldsymbol{a}_4=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_3+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_4。$$

证明A是正交变换。

14．设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$是$\mathbf{R}^3$的标准正交基，求$\mathbf{R}^3$上的正交变换$A$，使得

$$A(\boldsymbol{a}_1)=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3),\quad A(\boldsymbol{a}_2)=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3)。$$

15．已知酉空间$\mathbf{C}^3$中向量$\boldsymbol{a}_1=(\mathrm{i},2,-1)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(1,2,\mathrm{i})^T$。求与$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$都正交的单位向量。

16．证明对于$\mathbf{C}^n$中任意向量$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，成立

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2)。$$

§2 正交相似和酉相似

1. 对下列对称矩阵$\boldsymbol{A}$，求出正交矩阵$\boldsymbol{S}$，使得$\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{\Lambda}$为对角阵：

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$；　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-3&3&-3\\-3&-1&-3&3\\3&-3&-1&-3\\-3&3&-3&-1\end{pmatrix}$。

2．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a&2\\0&2&a\end{pmatrix}$（$a>0$）有一个特征值1。

（1）求a和其它特征值；（2）求正交矩阵$\boldsymbol{S}$，使得$\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$为对角阵。

3．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^2$，其中$k$为实常数，问$\boldsymbol{B}$是否与对角阵相似？若相似，求出这样一个对角阵。

4．已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}。$$

若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，（1）求a，b；（2）求正交矩阵$\boldsymbol{S}$，使得$\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$为对角阵。

5．已知3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$有二重特征值1，和单重特征值-1，且$(0,1,1)^T$是对应于-1的特征向量，求$\boldsymbol{A}$。

6．已知3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为2，且6是$\boldsymbol{A}$的二重特征值，$\boldsymbol{x}_1=(1,1,0)^T$，$\boldsymbol{x}_2=(2,1,1)^T$，$\boldsymbol{x}_3=(-1,2,-3)^T$都是$\boldsymbol{A}$的属于特征值6的特征向量。

（1）求$\boldsymbol{A}$的另一个特征值和对应的特征向量；

（2）求矩阵$\boldsymbol{A}$。

7．已知 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行之和均为 3，向量 $\boldsymbol{x}_1=(-1,2,-1)^T$ 和 $\boldsymbol{x}_2=(0,-1,1)^T$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解。

（1） 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

（2） 求正交矩阵 $\boldsymbol{S}$，使得 $\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{AS}$ 为对角阵。

8．设有矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&&\\1&0&&\\&&x&1\\&&1&2\end{pmatrix}$，且已知 3 是它的特征值。

（1）求常数 x；（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{S}$，使得 $(\boldsymbol{AS})^T(\boldsymbol{AS})$ 为对角矩阵。

9．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，且线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解但不唯一。

（1）求 a 的值；（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{S}$，使得 $\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{AS}$ 为对角阵。

10．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}_n$，且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)=2$，求 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵。

11．设 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个相互正交的实特征向量，证明 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵。

12．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，且有相同的特征值。证明：若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个相异特征值，则存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{QP}$。

13．设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是 3 维单位实列向量，且 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=0$。记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{ab}^T+\boldsymbol{ba}^T$，证明 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$ 相似。

14．已知 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&1\end{pmatrix}$，求酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{AU}$ 为对角阵。

15．证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵的充分必要条件是：对于任意 n 为列向量 $\boldsymbol{x}$，成立 $\|\boldsymbol{Ax}\|=\|\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{x}\|$。

16．设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，求矩阵 $a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{I}$ 的行列式。