矩阵与行列式练习题

§1　向量与矩阵

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，

（1）　计算 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$。问 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 是否成立？

（2）计算 $(\boldsymbol{AB})^T$，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$。问 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$ 是否成立？

2．设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为 3 维列向量，且 $\boldsymbol{ab}^T=\begin{pmatrix}-3&6&3\\1&-2&-1\\-2&4&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$。

3．若 $(1,0,6,x)\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=(1,6,1,0)$，求 x。

4．设 $f(x)=x^2-5x+3$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$。

5．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{pmatrix}$。

（1）求 $\boldsymbol{AD}$ 和 $\boldsymbol{DA}$；

（2）若 $\boldsymbol{D}$ 满足 $d_i\neq d_j$（$i,j=1,2,\cdots,n$，且 $i\neq j$），证明与 $\boldsymbol{D}$ 相乘可交换的方阵必是对角矩阵。

6．设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵。若 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是**对称矩阵**。若 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是**反对称矩阵**。

（1）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是反对称矩阵；

（2）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是反对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 是反对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

（4）对于任何方阵 $\boldsymbol{A}$，证明：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T$ 是反对称矩阵；

（5）证明任何方阵 $\boldsymbol{A}$ 均可以表成对称矩阵与反对称矩阵之和。

7．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$，求实数 a 的值，使 $\boldsymbol{A}^{100}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$。

8．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\0&a&b&c\\0&0&a&b\\0&0&0&a\end{pmatrix}$，证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

9．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$（$n\in\mathbf{N}^+$）。

10．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$（$n\in\mathbf{N}^+$）。

11．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$（$n\geq 2$）。

12．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，求所有与 $\boldsymbol{A}$ 相乘可交换的方阵。

13．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}_n)$，证明 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}_n$。

14．对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，称 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的迹。证明：（1）对于任何 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，成立 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$；

（2）不存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=k\boldsymbol{I}_n$（$k\neq 0$）。

15. 证明：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘可交换，则 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的多项式 $g(\boldsymbol{B})$ 相乘也可交换。

16．设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{B}$，且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，证明：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$。

§2　行列式

1．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&9-x^2\end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$。

2．已知$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1$，求$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y+1 & 3z+2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$。

3．证明

$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \sin(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\gamma) \\ \sin(\beta+\alpha) & \sin 2\beta & \sin(\beta+\gamma) \\ \sin(\gamma+\alpha) & \sin(\gamma+\beta) & \sin 2\gamma \end{vmatrix}=0。$$

4．设$\boldsymbol{A}$为 3 阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=8$，求$\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^2\right|$。

5．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是同阶方阵，且$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{I}$，$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$，求$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$。

6．设$\boldsymbol{a}=(1,0,-1)^T$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$，其中$a$为实数，$n$为正整数。求$|a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^n|$。

7．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，若 3 阶矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_3$，求$|\boldsymbol{B}|$。

8．设n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2+6\boldsymbol{A}+8\boldsymbol{I}=0$，求$|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}|$。

9．证明：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+a_1 & x_1^2+b_1x_1+b_2 & x_1^3+c_1x_1^2+c_2x_1+c_3 \\ 1 & x_2+a_1 & x_2^2+b_1x_2+b_2 & x_2^3+c_1x_2^2+c_2x_2+c_3 \\ 1 & x_3+a_1 & x_3^2+b_1x_3+b_2 & x_3^3+c_1x_3^2+c_2x_3+c_3 \\ 1 & x_4+a_1 & x_4^2+b_1x_4+b_2 & x_4^3+c_1x_4^2+c_2x_4+c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}。$$

10．计算下列行列式（D_n为n阶行列式）：

（1）$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$；

（2）$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}$；

（3）$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$；

（4）$D_n=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\end{vmatrix}$；

（5）$D_n=\begin{vmatrix}0 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \cdots & a_1+a_n\\ a_2+a_1 & 0 & a_2+a_3 & \cdots & a_2+a_n\\ a_3+a_1 & a_3+a_2 & 0 & \cdots & a_3+a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & \cdots & 0\end{vmatrix}$ （$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$）；

（6）$D_n=\begin{vmatrix}x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ x_1 & x_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\end{vmatrix}$；

（7）$D_{2n}=\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0\\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a\end{vmatrix}$。

11．求方程$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}=0$的根。

12．求下面方程的根：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1-x \end{vmatrix}=0。$$

13．证明：n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}。$$

14．证明：若$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，则n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_n & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a_3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}=\left(\prod_{j=2}^{n}a_j\right)\left(a_1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{ja_1}{a_j}\right)。$$

15．证明：若$\sin x\neq 0$，则n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & & & \\ 1 & 2\cos x & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos x & 1 \\ & & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}。$$

16．已知n阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，记A_{ij}为a_{ij}的代数余子式（$i,\ j=1,2,\cdots,n$）。证明

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \cdots & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}=a_{nn}\,|\boldsymbol{A}|^{n-2}。$$

17．证明：$n+1$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ a_3^n & a_3^{n-1}b_3 & a_3^{n-2}b_3^2 & \cdots & a_3b_3^{n-1} & b_3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n+1}(a_ib_j - a_jb_i)\text{。}$$

18．证明：n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = 1\text{。}$$

19．设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$。

20．设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$，求 D_n 中所有元素的代数余子式之和。

§3 逆 阵

1. 求下列矩阵的逆阵：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。

2. 求n阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 的逆阵，并求$|\boldsymbol{A}|$中所有元素的代数余子式之和。

3. 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$。若三阶方阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$。

4．已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$。若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$，

求 $\boldsymbol{X}$。

5. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ 和 $\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}_n$ 都可逆，并求它们的逆阵。

6．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{B}$。

7. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$。

8. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$， 若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^T\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{A}$。

9．证明：对称矩阵的逆阵还是对称矩阵；反对称矩阵的逆阵还是反对称矩阵。

10．设 $\boldsymbol{P}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $\boldsymbol{PP}^T$ 可逆。记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{P}^T(\boldsymbol{PP}^T)^{-1}\boldsymbol{P}$。证明 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$。

11.（1）设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，证明：$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$；

（2）设 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 是同阶可逆矩阵，证明：$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$。

12．设 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，求 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|$。

13． 设 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$， 若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{B}$。

14．设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^T$（$a<0$）。记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_n+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$。若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，求 a。

15．设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量，记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$。证明：

（1） $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$；

（2）当 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$ 时， $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵。

16．设 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$， $\boldsymbol{C}$ 是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 可逆，化简矩阵算式

$$(\boldsymbol{BC}^T-\boldsymbol{I}_n)^T(\boldsymbol{AB}^{-1})^T+[(\boldsymbol{BA}^{-1})^T]^{-1}。$$

17．设可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和都为 a，证明： $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和都为 a^{-1}。

18.（1）设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶可逆方阵，$\boldsymbol{D}$ 是 n 阶可逆方阵， $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 $n\times m$ 矩阵，证明**降阶公式**：$|\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}|$。

（2）利用等式

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(1,2,\cdots,n),
$$

和（1）的结论计算$|\boldsymbol{A}|$。

（3）利用等式

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}=-\boldsymbol{I}_n+\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{I}_2^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

和（1）的结论计算$|\boldsymbol{B}|$。

19．用 Cramer 法则解下列线性方程组：

$$
\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=6, \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+x_2+3x_3+4x_4=2, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=2. \end{cases}
$$

20．若线性方程组

$$
\begin{cases} x_1+x_2+x_3+ax_4=0, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2+ax_3+bx_4=0 \end{cases}
$$

有非零解，问a，b应满足什么条件？

21．设$a^2\neq b^2$，证明线性方程组

$$
\begin{cases} ax_1+bx_{2n}=1, \\ ax_2+bx_{2n-1}=1, \\ \qquad\cdots\cdots \\ ax_{n-1}+bx_{n+2}=1, \\ ax_n+bx_{n+1}=1, \\ bx_n+ax_{n+1}=1, \\ bx_{n-1}+ax_{n+2}=1, \\ \qquad\cdots\cdots \\ bx_2+ax_{2n-1}=1, \\ bx_1+ax_{2n}=1 \end{cases}
$$

有唯一解，并求其解。